Spracovanie korelovaných meraní

Ľubomíra Gerhátová
Katedra globálnej geodézie a geoinformatiky, Stavebná fakulta
Slovenská technická univerzita v Bratislave

Družicové metody v geodézii a katastru
Ústav geodézie, VUT Brno, 2.2.2023

Korelácia

- normovaná miera stochastickej závislosti medzi dvojicou náhodných premenných
- empirický koeficient korelácie: miera závislosti medzi realizáciami náhodnej premennej, napr. medzi výsledkami opakovaných meraní, medzi meraniami rôznych typov, medzi meraniami rozličnými prístrojmi alebo meračmi, medzi meraniami rozličnými technológiami alebo postupmi, medzi výsledkami meraní a vonkajším prostredím...
- ideálny stav: merania stochasticky nezávislé, dosiahneme to vystriedaním rozličných podmienok pri meraniach, striedaním meračov, prístrojov, metód merania...
- spracovanie korelovaných meraní: úplne identický spôsob ako pri nekorelovaných meraniach, rozdiel je v kovariančnej matici meraní
- ako môže vyzerať kovariančná matica meraní?
- čo sa stane, ak merania považujeme za navzájom nezávislé, aj keď také nie sú?

Príklady korelovaných meraní a ich spracovanie: meranie zenitového uhla

- súbor nameraných údajov:

i	z_i
1	$88°46'31''$
2	$88°46'41''$
3	$88°46'29''$
4	$88°46'35''$

- presnosť daná kovariančnou maticou $\mathbf{\Sigma}_x = \sigma_0^2 \mathbf{Q}_x$, kde σ_0^2 nepoznáme a matica kofaktorov $\mathbf{Q}_x$ môže mať nasledovné tvary:
  - rovnako presné a vzájomne nezávislé merania $\mathbf{Q}_x = \mathbf{I}$
  - vzájomne nezávislé merania s rozličnými váhami $\mathbf{Q}_x = \mathbf{P}^{-1}$

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} p_1 & 0 & 0 & 0 \\ & p_2 & 0 & 0 \\ & & p_3 & 0 \\ & & & p_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ & 2 & 0 & 0 \\ & & 1 & 0 \\ & & & 2 \end{bmatrix}$$

  - rovnako presné, vzájomne korelované merania

$$\mathbf{Q}_x = \begin{bmatrix} 1 & 0.69 & 0.25 & -0.03 \\ & 1 & 0.69 & 0.25 \\ & & 1 & 0.69 \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

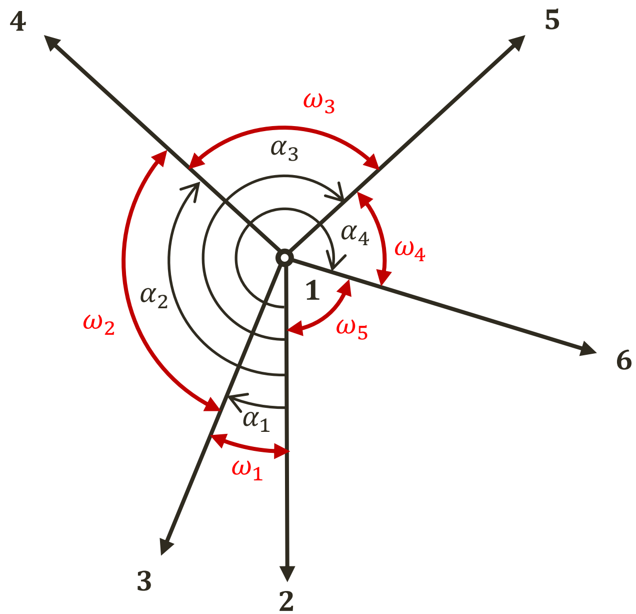
Príklady korelovaných meraní a ich spracovanie: meranie zenitového uhla

- výsledky: odhad parametra $\hat{\theta}$, vektor opráv $\mathbf{v}^T$, odhad jednotkovej strednej chyby $\hat{\sigma}_0$ a strednej chyby neznámeho parametra $\hat{\sigma}_\theta$, kovariančná matica vektora opráv $\mathbf{\Sigma}_v$, korelačná matica vektora opráv $\boldsymbol{\rho}_v$

	$\mathbf{Q}_x = \mathbf{I}$	$\mathbf{Q}_x = \mathbf{P}^{-1}$	$\mathbf{Q}_x = [\ddots]$
$\hat{\theta}$	$88°46'34.0''$	$88°46'35.3''$	$88°46'33.1''$
$\mathbf{v}^T$	$[3.0'' \quad -7.0'' \quad 5.0'' \quad -1.0'']$	$[4.3'' \quad -5.7'' \quad 6.3'' \quad 0.3'']$	$[2.1'' \quad -7.9'' \quad 4.1'' \quad -1.9'']$
$\hat{\sigma}_0$	$5.3''$	$6.4''$	$16.2''$
$\hat{\sigma}_\theta$	$2.6''$	$2.6''$	$11.3''$
$\mathbf{\Sigma}_v$ $('')^2$	$\begin{bmatrix} 21.00 & -7.00 & -7.00 & -7.00 \\ & 21.00 & -7.00 & -7.00 \\ & & 21.00 & -7.00 \\ & & & 21.00 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 34.26 & -6.85 & -6.85 & -6.85 \\ & 13.70 & -6.85 & -6.85 \\ & & 34.26 & -6.85 \\ & & & 13.70 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 135.42 & 54.00 & -61.57 & -135.12 \\ & 135.42 & 54.00 & -61.57 \\ & & 135.42 & 54.00 \\ & & & 135.42 \end{bmatrix}$
$\boldsymbol{\rho}_v$	$\begin{bmatrix} 1 & -0.33 & -0.33 & -0.33 \\ & 1 & -0.33 & -0.33 \\ & & 1 & -0.33 \\ & & & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & -0.32 & -0.20 & -0.32 \\ & 1 & -0.32 & -0.50 \\ & & 1 & -0.32 \\ & & & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0.40 & -0.45 & -1.00 \\ & 1 & 0.40 & -0.45 \\ & & 1 & 0.40 \\ & & & 1 \end{bmatrix}$

Príklady korelovaných meraní a ich spracovanie: meranie osnovy smerov

- meranie osnovy smerov (hodnoty v jednej skupine), z ktorej následne určíme vodorovné uhly:



smer na	poloha	čítanie
2	1	0 00 45
	2	180 00 48
3	1	5 01 10
	2	185 01 14
4	1	126 51 28
	2	306 51 30
5	1	235 37 54
	2	55 37 56
6	1	285 28 43
	2	105 28 45
1	1	0 00 46
	2	180 00 52

- aplikujeme 2. lineárny model spracovania MNŠ – nepriame meranie vektorového parametra

Príklady korelovaných meraní a ich spracovanie: meranie osnovy smerov

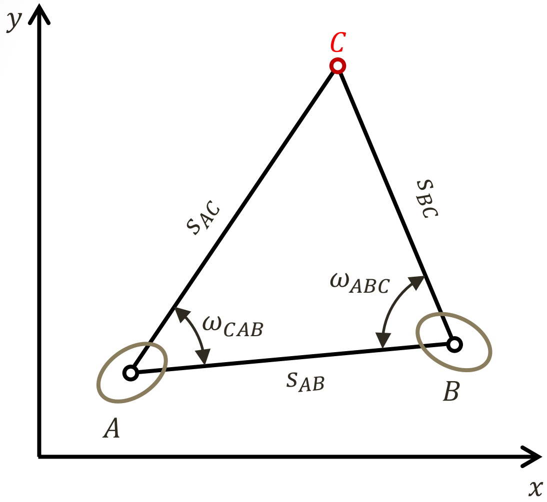
- výsledky: jednotlivé smery, hodnota čítania na začiatočnom smere, kolimačná chyba; vodorovné uhly, ich stredné chyby, korelačná matica

- $$\widehat{\boldsymbol{\Theta}} = \begin{bmatrix} \hat{\alpha}_1 \\ \hat{\alpha}_2 \\ \hat{\alpha}_3 \\ \hat{\alpha}_4 \\ \hat{\Delta} \\ \hat{c} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5^\circ\ 00'\ 24.2'' \\ 126^\circ\ 50'\ 41.2'' \\ 235^\circ\ 37'\ 07.3'' \\ 285^\circ\ 27'\ 56.2'' \\ 0^\circ\ 00'\ 47.8'' \\ 1.6'' \end{bmatrix} \qquad \widehat{\boldsymbol{\Sigma}}_{\Delta\Theta} = \begin{bmatrix} 1.58 & 0.53 & 0.53 & 0.53 & -0.53 & 0 \\ & 1.58 & 0.53 & 0.53 & -0.53 & 0 \\ & & 1.58 & 0.53 & -0.53 & 0 \\ & & & 1.58 & -0.53 & 0 \\ & & & & 0.53 & 0 \\ & & & & & 0.18 \end{bmatrix} \cdot ('')^2$$

- $$\boldsymbol{\Omega} = \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \\ \omega_4 \\ \omega_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5^\circ\ 00'\ 24.2'' \\ 121^\circ\ 50'\ 17.0'' \\ 108^\circ\ 46'\ 26.1'' \\ 49^\circ\ 50'\ 48.9'' \\ 74^\circ\ 32'\ 03.8'' \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{\Sigma}_{\Omega} = \begin{bmatrix} 1.58 & -1.06 & 0 & 0 & -0.53 \\ & 2.11 & -1.06 & 0 & 0 \\ & & 2.11 & -1.06 & 0 \\ & & & 2.11 & -1.06 \\ & & & & 1.58 \end{bmatrix}$$

- $$\begin{bmatrix} \sigma_{\omega_1} \\ \sigma_{\omega_2} \\ \sigma_{\omega_3} \\ \sigma_{\omega_4} \\ \sigma_{\omega_5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.3'' \\ 1.5'' \\ 1.5'' \\ 1.5'' \\ 1.3'' \end{bmatrix}, \qquad \widehat{\boldsymbol{\rho}}_{\Omega} = \begin{bmatrix} 1 & -0.58 & 0 & 0 & -0.33 \\ & 1 & -0.50 & 0 & 0 \\ & & 1 & -0.50 & 0 \\ & & & 1 & -0.58 \\ & & & & 1 \end{bmatrix}$$

Príklady korelovaných meraní a ich spracovanie: lokálna geodetická sieť



- dané: poloha bodov A, B vrátane ich kovariančnej matice
- merané: vodorovné dĺžky a uhly, daná ich presnosť
- určované: poloha bodu C a jeho kovariančná matica

- aplikujeme 2. lineárny model spracovania MNŠ – nepriame meranie vektorového parametra

- varianty riešenia:
  - súradnice východiskových bodov A a B sú dané ako výsledky predchádzajúceho merania – pseudomerania, pri spracovaní sa súradnice východiskových bodov a ich kovariančná matica môžu zmeniť
  - súradnice východiskových bodov A a B považujeme za bezchybné a navzájom nezávislé

Príklady korelovaných meraní a ich spracovanie: lokálna geodetická sieť

- kovariančná matica meraní: prvá alternatíva riešenia
- $\boldsymbol{\Sigma}_x = \boldsymbol{\Sigma}_y = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Sigma}_{s,\omega} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\Sigma}_{AB} \end{bmatrix}$, $\qquad \boldsymbol{\Sigma}_{AB} = \begin{bmatrix} 6.1 & -0.1 & -0.6 & 0.1 \\ & 10.2 & 0.1 & -1.0 \\ & & 5.5 & 0.3 \\ & & & 9.8 \end{bmatrix} \cdot 10^{-6}\mathrm{m}^2$
- matica $\boldsymbol{\Sigma}_{s,\omega}$ je diagonálna a vyjadruje presnosť merania dĺžok a vodorovných uhlov

- kovariančná matica meraní: druhá alternatíva riešenia
- $\boldsymbol{\Sigma}_x = \boldsymbol{\Sigma}_y = \boldsymbol{\Sigma}_{s,\omega}$

Príklady korelovaných meraní a ich spracovanie: lokálna geodetická sieť

- prvá alternatíva výpočtu:
  - zohľadnili sme neistotu v určení východiskových bodov A a B,
  - neznáme boli súradnice všetkých troch bodov (v poradí A, B, C)
- výsledok: súradnice bodu C, stredné chyby, submatica z kovariančnej matice neznámych:
- $\hat{\boldsymbol{\Theta}} = \begin{bmatrix} 11374.8856 \\ 9801.3625 \end{bmatrix}$ m, $\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{\Delta\Theta} = \begin{bmatrix} 74.07 & -4.55 \\ & 10.13 \end{bmatrix} \cdot \mathrm{mm}^2$, $\begin{bmatrix} \hat{\sigma}_{\bar{x}_C} \\ \hat{\sigma}_{\bar{y}_C} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8.6 \\ 3.2 \end{bmatrix} \cdot \mathrm{mm}$

- druhá alternatíva výpočtu:
  - východiskové body A a B sme považovali za bezchybné a navzájom nezávislé, ako meranú veličinu sme nepoužili dĺžku medzi bodmi A a B
- výsledok: súradnice bodu C, stredné chyby, kovariančná matica neznámych:
- $\hat{\boldsymbol{\Theta}} = \begin{bmatrix} 11374.8862 \\ 9801.3632 \end{bmatrix}$ m, $\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{\Delta\Theta} = \begin{bmatrix} 34.47 & -2.03 \\ & 5.29 \end{bmatrix} \cdot \mathrm{mm}^2$, $\begin{bmatrix} \hat{\sigma}_{\bar{x}_C} \\ \hat{\sigma}_{\bar{y}_C} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5.9 \\ 2.3 \end{bmatrix} \cdot \mathrm{mm}$

Záver

- geodetická prax: bežne predpokladáme stochastickú nezávislosť meraní
- dlhotrvajúce alebo opakujúce sa podmienky v čase a priestore ovplyvňujú rovnakým spôsobom celú skupinu meraní, ktoré sme za týchto podmienok vykonali: uplatňuje sa systematický charakter elementárnej chyby vyplývajúcej z určitého faktoru (napr. teplota, terén, osoba merača...): **fyzikálna korelácia**
- ak takéto merania vstúpia do spracovania, ovplyvnia aj jeho výsledky: v odhadoch neznámych parametrov sa prejavia v podobe **matematickej korelácie** medzi neznámymi parametrami
- je potrebné vykonávať komplexnú analýzu výsledkov meraní

Ďakujem za Vašu pozornosť ☺